全国青少年信息学奥林匹克竞赛

CCF NOI 2024

第二试

时间：2024 **年** 7 **月** 20 **日** 08:00 ～ 13:00

题目名称	分数	登山	树形图
题目类型	传统型	传统型	传统型
目录	fraction	mountain	graphee
可执行文件名	fraction	mountain	graphee
输入文件名	fraction.in	mountain.in	graphee.in
输出文件名	fraction.out	mountain.out	graphee.out
每个测试点时限	6.0 秒	2.0 秒	1.5 秒
内存限制	512 MiB	2048 MiB	512 MiB
测试点数目	20	20	20
测试点是否等分	是	是	是
预测试点数目	20	20	20

提交源程序文件名

对于 C++ 语言	fraction.cpp	mountain.cpp	graphee.cpp

编译选项

对于 C++ 语言	-O2 -std=c++14 -static

注意事项（请仔细阅读）

1. 文件名（程序名和输入输出文件名）必须使用英文小写。赛后正式测试时将以选手留在题目目录下的源代码为准。
2. `main` 函数的返回值类型必须是 `int`，程序正常结束时的返回值必须是 0。
3. 因违反以上两点而出现的错误或问题，申诉时一律不予受理。
4. 若无特殊说明，结果的比较方式为全文比较（过滤行末空格及文末回车）。
5. 选手提交的程序源文件必须不大于 100 KB。
6. 程序可使用的栈空间内存限制与题目的内存限制一致。
7. 禁止在源代码中改变编译器参数（如使用 `#pragma` 命令），禁止使用系统结构相关指令（如内联汇编）和其他可能造成不公平的方法。
8. 选手可使用快捷启动页面中的工具 selfEval 进行自测。在将待测程序（不必是全部题目）放到题目目录下后，即可选择全部或部分题目进行自测。注意：自测有次数限制，且自测结果仅用于选手调试，并不做为最终正式成绩。

分数（fraction）

【题目描述】

小 Y 和小 C 在玩一个游戏。

定义正分数为分子、分母都为正整数的既约分数。

定义**完美正分数集合** S 为满足以下五条性质的正分数集合：

1. $\frac{1}{2} \in S$；
2. 对于 $\frac{1}{2} < x < 2$，$x \notin S$；
3. 对于所有 $x \in S$，$\frac{1}{x} \in S$；
4. 对于所有 $x \in S$，$x + 2 \in S$；
5. 对于所有 $x \in S$ 且 $x > 2$，$x - 2 \in S$。

可以证明，上述五条性质确定了唯一的完美正分数集合 S。

所有完美正分数集合 S 中的正分数被称为**完美正分数**。记 $f(i,j)$ 表示 $\frac{i}{j}$ 是否为完美正分数，即 $f(i,j) = 1$ 当且仅当 i 与 j 互素且 $\frac{i}{j} \in S$，否则 $f(i,j) = 0$。

小 C 问小 Y：给定 n, m，求所有分子不超过 n，分母不超过 m 的完美正分数的个数，即求 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(i,j)$。

时光走过，小 C 和小 Y 会再遇见。回首往事，大家都过上了各自想要的生活。

【输入格式】

从文件 ***fraction.in*** 中读入数据。

输入的第一行包含两个正整数 n 和 m，分别表示分子和分母的范围。

【输出格式】

输出到文件 ***fraction.out*** 中。

输出一行包含一个非负整数，表示对应的答案。

【样例 1 输入】

```
10 10
```

【样例 1 输出】

```
16
```

【样例 1 解释】

可以证明，分子分母均不超过 10 的完美正分数共有 16 个，其中小于 1 的 8 个如下：

- $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{4}{9}$。

大于 1 的 8 个完美正分数分别为上述 8 个小于 1 的完美正分数的倒数。

- 可以按照如下方式验证 $\frac{2}{9}$ 是否为完美正分数：因为 $\frac{1}{2} \in S$，$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \in S$，$\frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} \in S$，$\frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9} \in S$，所以 $\frac{2}{9}$ 是完美正分数。
- 可以按照如下方式验证 $\frac{3}{7}$ 是否为完美正分数：假设 $\frac{3}{7}$ 是完美正分数，则 $\frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3} \in S$，$\frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \in S$，$\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \in S$，$3 - 2 = 1 \in S$，与第 2 条性质矛盾，因此 $\frac{3}{7}$ 不是完美正分数。

【样例 2】

见选手目录下的 ***fraction/fraction2.in*** 与 ***fraction/fraction2.ans***。
这个样例满足测试点 $4 \sim 6$ 的约束条件。

【样例 3】

见选手目录下的 ***fraction/fraction3.in*** 与 ***fraction/fraction3.ans***。
这个样例满足测试点 $11 \sim 14$ 的约束条件。

【样例 4】

见选手目录下的 ***fraction/fraction4.in*** 与 ***fraction/fraction4.ans***。
这个样例满足测试点 $15 \sim 17$ 的约束条件。

【数据范围】

对于所有测试数据保证：$2 \le n, m \le 3 \times 10^7$。

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>$n \le$</th><th>$m \le$</th></tr>
<tr><td>$1 \sim 3$</td><td>10^2</td><td>10^2</td></tr>
<tr><td>$4 \sim 6$</td><td>10^3</td><td>10^3</td></tr>
<tr><td>$7 \sim 10$</td><td>8,000</td><td>8,000</td></tr>
<tr><td>$11 \sim 14$</td><td>10^5</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>$15 \sim 17$</td><td>10^6</td><td>10^6</td></tr>
<tr><td>18</td><td rowspan="2">8×10^6</td><td>8×10^6</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="2">3×10^7</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3×10^7</td></tr>
</table>

登山（mountain）

【题目描述】

“为什么要攀登？因为山就在那里。”

慕士塔格山上有 n 处点位，点从 1 到 n 编号，1 号点位为山顶。这 n 个点位构成一棵有根树的结构，其中 1 号点位为根，对于 $2 \le i \le n$，i 号点位的父亲结点为 p_i 号点位。

记 d_i 为 i 号点位到山顶所需经过的边数。形式化地说，$d_1 = 0$，对于 $2 \le i \le n$，$d_i = d_{p_i} + 1$。

定义一条**登山路径**为从 $2 \sim n$ 号点位中的某一个开始，经过若干次**移动**后**到达山顶**的方案。

定义一次从 i（$2 \le i \le n$）号点位出发的**移动**为以下两种方式之一：

1. 冲刺：在给定的冲刺范围 $[l_i, r_i]$ 内，选择一个正整数 k 满足 $l_i \le k \le r_i$，向山顶移动 k 步，即移动至 i 号点位在有根树上的 k 级父亲处。保证 $1 \le l_i \le r_i \le d_i$。
2. 休息：由于慕士塔格山地形陡峭，休息时会滑落到某一个儿子结点处。形式化地说，选择一个满足 $p_j = i$ 的 j，移动至到 j 号点位。特别地，若 i 号点位为有根树的叶子结点，则不存在满足 $p_j = i$ 的 j，因此此时不能选择休息。

定义一条**登山路径**对应的**登山序列**为初始点位及每次**移动**到的点位所构成的序列。形式化地说，一条从 x 号点位开始的**登山路径**对应的**登山序列**是一个点序列 $a_1 = x, a_2, \ldots, a_m = 1$ 满足对于 $1 \le i < m$，a_{i+1} 是 a_i 的 k（$l_{a_i} \le k \le r_{a_i}$）级组先或 $p_{a_{i+1}} = a_i$。

为了保证每次冲刺都能更接近山顶，一条**合法的登山路径**需要满足：对于初始点位或某次移动到的点位 i，以后冲刺到的点位 j 都必须满足 $d_j < d_i - h_i$，其中 h_i 是一个给定的参数。保证 $0 \le h_i < d_i$。形式化地说，一条**合法的登山路径**对应的**登山序列** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 需要满足：对于所有 $1 \le i < j \le m$，若 $p_{a_j} \ne a_{j-1}$，则 $d_{a_j} < d_{a_i} - h_{a_i}$。

对于 $2 \sim n$ 号所有点位，求从这些点位开始的**合法的登山路径**条数。两条**登山路径**不同当且仅当其对应的**登山序列**不同。由于答案可能较大，你只需要求出答案对 $998,244,353$ 取模后的结果。

【输入格式】

从文件 ***mountain.in*** 中读入数据。

本题有多组测试数据。

输入的第一行包含一个整数 c，表示测试点编号。$c = 0$ 表示该测试点为样例。

输入的第二行包含一个整数 t，表示测试数据组数。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

输入的第一行包含一个整数 n，表示慕士塔格山的点位数量。

接下来 $n-1$ 行，第 $i-1$（$2 \le i \le n$）行包含四个整数 p_i, l_i, r_i, h_i。保证 $1 \le p_i < i$，$1 \le l_i \le r_i \le d_i$，$0 \le h_i < d_i$。

【输出格式】

输出到文件 ***mountain.out*** 中。

对于每组测试数据，输出一行 $n-1$ 个整数，分别表示从点位 $2 \sim n$ 到达山顶的方案数对 $998,244,353$ 取模后的结果。

【样例 1 输入】

```
0
3
5
1 1 1 0
2 1 1 0
2 1 2 1
4 2 3 0
6
1 1 1 0
2 1 2 0
3 1 3 2
4 1 4 1
5 1 5 3
6
1 1 1 0
2 1 2 0
2 1 2 0
3 1 2 0
3 2 3 2
```

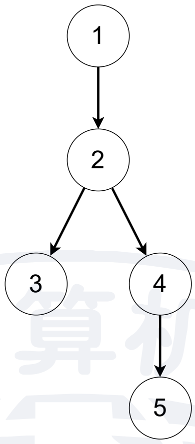
【样例 1 输出】

```
3 3 2 4
5 9 3 21 6
4 10 5 14 1
```

【样例 1 解释】

样例 1 共包含三组测试数据。

对于第一组测试数据，慕士塔格山的点位结构如下：



在该测试数据中：$d_1 = 0$，$d_2 = 1$，$d_3 = d_4 = 2$，$d_5 = 3$。

从 4 开始的合法的登山路径共有以下 2 条：

1. 直接选择冲刺到 4 的 2 级父亲，也就是 1，到达山顶。对应的登山序列为 $[4, 1]$。
2. 先休息滑落到 5；然后从 5 冲刺到它的 3 级父亲，到达山顶。对应的登山序列为 $[4, 5, 1]$。

从 5 开始的合法的登山路径共有以下 4 条：

1. 直接选择冲刺到 5 的 3 级父亲，也就是 1，到达山顶。对应的登山序列为 $[5, 1]$。
2. 先冲刺到 5 的 2 级父亲，也就是 2；然后再从 2 冲刺到它的 1 级父亲，到达山顶。对应的登山序列为 $[5, 2, 1]$。
3. 先冲刺到 5 的 2 级父亲，也就是 2；然后在 2 处休息，滑落到 4；接着从 4 冲刺到它的 2 级父亲，到达山顶。对应的登山序列为 $[5, 2, 4, 1]$。
4. 先冲刺到 5 的 2 级父亲，也就是 2；然后在 2 处休息，滑落到 4；继续休息，滑落到 5；接着从 5 再次冲刺到它的 3 级父亲，到达山顶。对应的登山序列为 $[5, 2, 4, 5, 1]$。

【样例 2】

见选手目录下的 ***mountain/mountain2.in*** 与 ***mountain/mountain2.ans***。

这个样例满足测试点 2, 3 的约束条件。

【样例 3】

见选手目录下的 ***mountain/mountain3.in*** 与 ***mountain/mountain3.ans***。

这个样例满足测试点 9 的约束条件。

【样例 4】

见选手目录下的 *mountain/mountain4.in* 与 *mountain/mountain4.ans*。
这个样例满足测试点 11, 12 的约束条件。

【样例 5】

见选手目录下的 *mountain/mountain5.in* 与 *mountain/mountain5.ans*。
这个样例满足测试点 13 的约束条件。

【数据范围】

对于所有测试数据保证：$1 \le t \le 4$，$2 \le n \le 10^5$。
对于任意的 $2 \le i \le n$，保证：$1 \le p_i < i$，$1 \le l_i \le r_i \le d_i$，$0 \le h_i < d_i$。

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>$n \le$</th><th>是否有 $l_i = r_i$</th><th>是否有 $h_i = 0$</th><th>是否有 $p_i = i - 1$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td rowspan="3">否</td><td rowspan="3">否</td><td rowspan="3">否</td></tr>
<tr><td>2, 3</td><td>300</td></tr>
<tr><td>4, 5</td><td>5,000</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="7">10^5</td><td rowspan="4">是</td><td rowspan="2">是</td><td>是</td></tr>
<tr><td>7</td><td>否</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="2">否</td><td>是</td></tr>
<tr><td>9</td><td>否</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">否</td><td rowspan="2">是</td><td>是</td></tr>
<tr><td>11, 12</td><td>否</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="2">否</td><td>是</td></tr>
<tr><td>14 ∼ 20</td><td>否</td></tr>
</table>

树形图（graphee）

【题目描述】

给定一个 n 个点 m 条边的**简单有向图** G，顶点从 1 到 n 编号。其中简单有向图的定义为**不存在重边与自环**的有向图。

定义顶点 r 是有向图 G 的根当且仅当对于 $1 \le k \le n$，顶点 r 到顶点 k 存在恰好一条**有向简单路径**，其中简单路径的定义为**不经过重复点的路径**。

定义每个点的种类如下：

- 若顶点 r 是图 G 的根，则称顶点 r 为图 G 的**一类点**。
- 若顶点 r 不是图 G 的一类点，且存在一种删边的方案，使得图 G 在删去若干条边后得到的图 G' 满足：所有图 G 中的一类点都是 G' 的根，且顶点 r 也是图 G' 的根，则称顶点 r 为图 G 的**二类点**。
- 若顶点 r 不满足上述条件，则称顶点 r 为图 G 的**三类点**。

根据上述定义，图 G 的每个点都恰好属于一类点、二类点、三类点之一。你需要判断点 $1 \sim n$ 分别属于这三个种类中的哪一种。

【输入格式】

从文件 ***graphee.in*** 中读入数据。

本题有多组测试数据。

输入的第一行包含一个非负整数 c，表示测试点编号。$c = 0$ 表示该测试点为样例。

输入的第二行包含一个正整数 t，表示测试数据组数。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

输入的第一行包含两个正整数 n, m，分别表示有向图的点数和边数。

接下来 m 行，每行包含两个正整数 u, v，表示一条从 u 到 v 的有向边。保证 $1 \le u, v \le n$，且给定的有向图 G 不存在重边与自环。

【输出格式】

输出到文件 ***graphee.out*** 中。

对于每组数据，输出一行包含一个长度恰好为 n 的字符串 s 表示每个点的种类。其中 $s_i = 1$ 表示点 i 为**一类点**，$s_i = 2$ 表示点 i 为**二类点**，$s_i = 3$ 表示点 i 为**三类点**。

【样例 1 输入】

```
0
2
4 7
```

```
2 1
4 1
1 4
2 3
3 4
2 4
4 3
4 5
1 2
2 3
2 4
3 1
4 3
```

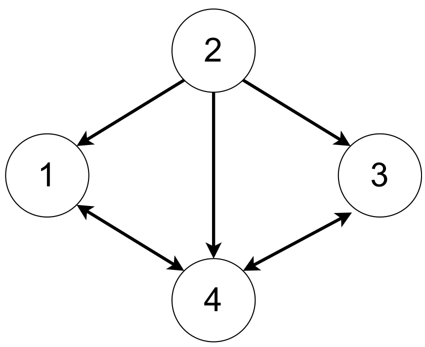
【样例 1 输出】

```
3233
2211
```

【样例 1 解释】

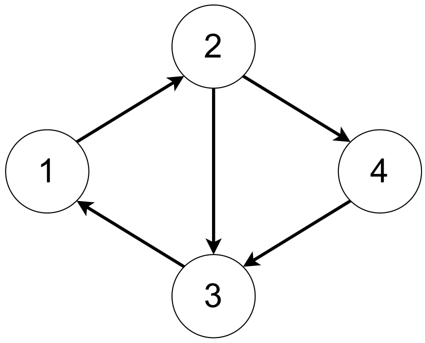
样例 1 共包含两组测试数据。

对于第一组测试数据，输入的图如下：



由于 1,3,4 均不存在到达 2 的路径，因此 1,3,4 均为三类点。由于 2 到 1 的有向简单路径共有三条：$2 \to 1$，$2 \to 4 \to 1$，$2 \to 3 \to 4 \to 1$，因此 2 不是一类点。删去边 $1 \to 4$，$4 \to 1$，$3 \to 4$，$4 \to 3$ 后，2 到 $1,3,4$ 的有向简单路径均唯一，因此 2 是图 G' 的根，即 2 是二类点。

对于第二组测试数据，输入的图如下：



容易发现 $3, 4$ 均为一类点。删去边 $2 \to 3$ 后，每个点到其他所有点的有向简单路径均唯一，因此 $1, 2$ 均为二类点。

【样例 2】

见选手目录下的 *graphee/graphee2.in* 与 *graphee/graphee2.ans*。
这个样例满足测试点 2 的约束条件。

【样例 3】

见选手目录下的 *graphee/graphee3.in* 与 *graphee/graphee3.ans*。
这个样例满足测试点 $3, 4$ 的约束条件。

【样例 4】

见选手目录下的 *graphee/graphee4.in* 与 *graphee/graphee4.ans*。
这个样例满足测试点 $5, 6$ 的约束条件。

【样例 5】

见选手目录下的 *graphee/graphee5.in* 与 *graphee/graphee5.ans*。
这个样例满足测试点 $8, 9$ 的约束条件。

【样例 6】

见选手目录下的 *graphee/graphee6.in* 与 *graphee/graphee6.ans*。
这个样例满足测试点 $14, 15$ 的约束条件。

【数据范围】

对于所有测试数据保证：$1 \le t \le 10$，$2 \le n \le 10^5$，$1 \le m \le 2 \times 10^5$，且图 G 不存在重边与自环。

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>$t \le$</th><th>$n \le$</th><th>$m \le$</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>10</td><td>20</td><td>无</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="9">10</td><td rowspan="3">10^3</td><td rowspan="3">2,000</td><td>A</td></tr>
<tr><td>$3, 4$</td><td>B</td></tr>
<tr><td>$5, 6$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="6">10^5</td><td rowspan="6">2×10^5</td><td>A</td></tr>
<tr><td>$8, 9$</td><td>BC</td></tr>
<tr><td>$10 \sim 13$</td><td>B</td></tr>
<tr><td>$14, 15$</td><td>C</td></tr>
<tr><td>$16 \sim 20$</td><td>无</td></tr>
</table>

特殊性质 A：保证不存在一类点。

特殊性质 B：保证不存在二类点。

特殊性质 C：保证编号为 1 的点为图 G 的一类点。