全国青少年信息学奥林匹克竞赛

CCF NOI 2025

第二试

时间：2025 **年** 7 **月** 16 **日** 08:00 ∼ 13:00

题目名称	三目运算符	集合	绝对防御
题目类型	传统型	传统型	传统型
目录	`ternary`	`set`	`defense`
可执行文件名	`ternary`	`set`	`defense`
输入文件名	`ternary.in`	`set.in`	`defense.in`
输出文件名	`ternary.out`	`set.out`	`defense.out`
每个测试点时限	2.0 秒	2.0 秒	4.0 秒
内存限制	512 MiB	512 MiB	1024 MiB
测试点数目	20	25	20
测试点是否等分	是	是	是
预测试点数目	20	25	20

提交源程序文件名

对于 C++ 语言	`ternary.cpp`	`set.cpp`	`defense.cpp`

编译选项

对于 C++ 语言	`-O2 -std=c++14 -static`

注意事项（请仔细阅读）

1. 文件名（程序名和输入输出文件名）必须使用英文小写。赛后正式测试时将以选手留在题目目录下的源代码为准。
2. `main` 函数的返回值类型必须是 `int`，程序正常结束时的返回值必须是 0。
3. 若无特殊说明，结果的比较方式为全文比较（过滤行末空格及文末换行）。
4. 选手提交的程序源文件大小不得超过 100 KiB。
5. 程序可使用的栈空间内存限制与题目的内存限制一致。
6. 禁止在源代码中改变编译器参数（如使用 `#pragma` 命令），禁止使用系统结构相关指令（如内联汇编）或其他可能造成不公平的方法。
7. 因违反上述规定而出现的问题，申诉时一律不予受理。
8. 选手可使用快捷启动页面中的工具 selfEval 进行自测。选手需将待测程序的源文件置于相应题目目录下。每次自测时可选择全部或部分题目进行自测。注意：自测有次数限制，且自测结果仅供选手测试参考，不作为最终正式成绩。

三目运算符（ternary）

【题目描述】

对于一个长度为 n $(n \geq 3)$ 的 01 串 $S = s_1 \dots s_n$，定义变换 $T = f(S) = t_1 \dots t_n$ 如下：

$$t_i = \begin{cases} s_i, & i \leq 2, \\ s_i, & i \geq 3 \text{ 且 } s_{i-2} = 0, \\ s_{i-1}, & i \geq 3 \text{ 且 } s_{i-2} = 1. \end{cases}$$

定义变换 f 的**不动点**如下：若 01 串 T 满足 $f(T) = T$，则称 T 为变换 f 的不动点。

记 $f^k(S)$ 为 S 经过 k 次变换得到的串。特别地，记 $f^0(S) = S$。求最小的自然数 k，使得 $f^k(S)$ 为变换 f 的不动点，即满足 $f^{k+1}(S) = f^k(S)$ 的最小的自然数 k。可以证明，一定存在自然数 k 使得 $f^k(S)$ 为变换 f 的不动点。

小 Z 觉得这个问题过于简单，因此他增加了 q 次修改操作。第 i $(1 \leq i \leq q)$ 次修改会给定两个正整数 l_i, r_i $(1 \leq l_i \leq r_i \leq n)$，然后将区间 $[l_i, r_i]$ 内的所有原有的 0 替换为 1，所有原有的 1 替换为 0。你需要对初始时及每次修改后的字符串 S，求出最小的自然数 k，使得 $f^k(S)$ 为变换 f 的不动点。

【输入格式】

从文件 ***ternary.in*** 中读入数据。

本题包含多组测试数据。

输入的第一行包含两个非负整数 c, t，分别表示测试点编号与测试数据组数。$c = 0$ 表示该测试点为样例。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

第一行包含两个正整数 n, q，分别表示 S 的长度和修改次数。

第二行包含一个长度为 n 的 01 串 $S = s_1 \dots s_n$，表示初始时的字符串。

第 $i + 2$ $(1 \leq i \leq q)$ 行包含两个正整数 l_i, r_i，表示一次修改操作。

【输出格式】

输出到文件 ***ternary.out*** 中。

对于每组测试数据，设初始时的答案为 k_0，第 i $(1 \leq i \leq q)$ 次修改后的答案为 k_i，输出一行一个正整数，表示 $\bigoplus_{i=0}^{q} ((i + 1) \times k_i)$，其中 $\oplus$ 表示**二进制按位异或**。

【样例 1 输入】

```
0 2
5 2
11010
3 3
2 2
7 3
1010100
7 7
2 4
1 2
```

【样例 1 输出】

```
2
4
```

【样例 1 解释】

该样例共包含两组测试数据。

对于第一组测试数据：

- 初始时，$S = 11010$，$f(S) = 11100$，$f^2(S) = 11110$，$f^3(S) = f^4(S) = 11111$，因此 $k_0 = 3$；
- 第一次操作后，$S = 11110$，$f(S) = f^2(S) = 11111$，因此 $k_1 = 1$；
- 第二次操作后，$S = 10110$，$f(S) = f^2(S) = 10011$，因此 $k_2 = 1$。

故答案为 $\bigoplus_{i=0}^{q}((i+1) \times k_i) = (1 \times 3) \oplus (2 \times 1) \oplus (3 \times 1) = 3 \oplus 2 \oplus 3 = 2$。

对于第二组测试数据：

- 初始时，$S = 1010100$，$k_0 = 1$；
- 第一次操作后，$S = 1010101$，$k_1 = 1$；
- 第二次操作后，$S = 1101101$，$k_2 = 5$；
- 第三次操作后，$S = 0001101$，$k_3 = 2$。

故答案为 $\bigoplus_{i=0}^{q}((i+1) \times k_i) = (1 \times 1) \oplus (2 \times 1) \oplus (3 \times 5) \oplus (4 \times 2) = 4$。

【样例 2】

见选手目录下的 *ternary/ternary2.in* 与 *ternary/ternary2.ans*。

该样例满足测试点 $1 \sim 3$ 的约束条件。

【样例 3】

见选手目录下的 ***ternary/ternary3.in*** 与 ***ternary/ternary3.ans***。
该样例满足测试点 $4 \sim 6$ 的约束条件。

【样例 4】

见选手目录下的 ***ternary/ternary4.in*** 与 ***ternary/ternary4.ans***。
该样例满足测试点 $13, 14$ 的约束条件。

【样例 5】

见选手目录下的 ***ternary/ternary5.in*** 与 ***ternary/ternary5.ans***。
该样例满足测试点 $17 \sim 19$ 的约束条件。

【数据范围】

设 N, Q 分别为单个测试点内所有测试数据的 n, q 的和。对于所有测试数据，保证：

- $1 \le t \le 5$；
- $3 \le n \le 4 \times 10^5$，$N \le 8 \times 10^5$；
- $1 \le q \le 4 \times 10^5$，$Q \le 8 \times 10^5$；
- 对于所有 $1 \le i \le n$，均有 $s_i \in \{0, 1\}$；
- 对于所有 $1 \le i \le q$，均有 $1 \le l_i \le r_i \le n$。

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>$n, q \le$</th><th>$N, Q \le$</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>$1 \sim 3$</td><td rowspan="2">200</td><td rowspan="2">10^3</td><td>A</td></tr>
<tr><td>$4 \sim 6$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>$7, 8$</td><td rowspan="2">$5,000$</td><td rowspan="2">10^4</td><td>A</td></tr>
<tr><td>$9 \sim 11$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>12</td><td rowspan="3">10^5</td><td rowspan="3">2×10^5</td><td>A</td></tr>
<tr><td>$13, 14$</td><td>B</td></tr>
<tr><td>$15, 16$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>$17 \sim 19$</td><td rowspan="2">4×10^5</td><td rowspan="2">8×10^5</td><td>C</td></tr>
<tr><td>20</td><td>无</td></tr>
</table>

特殊性质 A：保证初始时及每次修改后，存在整数 $p \in [2, n]$ 满足 $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 1$ 且 $s_{p+1} = \cdots = s_n = 0$。

特殊性质 B：保证对于所有 $1 \le i \le q$，均有 $l_i = 1$，$r_i = n$。

特殊性质 C：保证对于所有 $1 \le i \le q$，均有 $l_i = 1$，且 $r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_q$。

集合（set）

【题目描述】

小 X 有 2^n 个数，编号为 0 到 2^n-1，第 i $(0 \le i < 2^n)$ 个数为 a_i。

对于 $S \subseteq \{0,1,\dots,2^n-1\}$，定义 $f(S)$ 为集合 S 中**所有数的二进制按位与**。特别地，若 S 为空集，则 $f(S) = 2^n - 1$。

定义两个 $\{0,1,\dots,2^n-1\}$ 的子集 P, Q（可以为空）构成的有序对 (P,Q) 是**特别的**当且仅当 $P \cap Q = \varnothing$ 且 $f(P) = f(Q)$。定义有序对 (P,Q) 的**权值**为**编号**包含在 $P \cup Q$ 内的所有数的乘积，即 $\prod_{i \in P \cup Q} a_i$。特别地，若 $P \cup Q = \varnothing$，则有序对 (P,Q) 的权值为 1。

小 X 想要知道所有特别的有序对的权值之和，请你帮助他求出这个值。由于答案可能较大，你只需要求出答案对 998,244,353 取模后的结果。

【输入格式】

从文件 ***set.in*** 中读入数据。

本题包含多组测试数据。

输入的第一行包含两个非负整数 c, t，分别表示测试点编号与测试数据组数。$c = 0$ 表示该测试点为样例。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

第一行包含一个正整数 n，表示有 2^n 个数。

第二行包含 2^n 个非负整数 $a_0, \dots, a_{2^n-1}$。

【输出格式】

输出到文件 ***set.out*** 中。

对于每组测试数据，输出一行一个整数，表示所有特别的有序对的权值之和对 998,244,353 取模后的结果。

【样例 1 输入】

```
0 2
2
1 2 3 4
3
1 1 1 1 1 1 1 1
```

【样例 1 输出】

```
117
2091
```

【样例 1 解释】

该样例共包含两组测试数据。

对于第一组测试数据，以下是所有特别的有序对 (P, Q)：

- $P = \varnothing$，$Q = \varnothing$，权值为 1；
- $P = \varnothing$，$Q = \{3\}$，权值为 $a_3 = 4$；
- $P = \{3\}$，$Q = \varnothing$，权值为 $a_3 = 4$；
- $P = \{0\}$，$Q = \{1, 2\}$，权值为 $a_0 \times a_1 \times a_2 = 6$；
- $P = \{0\}$，$Q = \{1, 2, 3\}$，权值为 $a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 = 24$；
- $P = \{0, 3\}$，$Q = \{1, 2\}$，权值为 $a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 = 24$；
- $P = \{1, 2\}$，$Q = \{0\}$，权值为 $a_0 \times a_1 \times a_2 = 6$；
- $P = \{1, 2, 3\}$，$Q = \{0\}$，权值为 $a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 = 24$；
- $P = \{1, 2\}$，$Q = \{0, 3\}$，权值为 $a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 = 24$；

故答案为 $1 + 4 + 4 + 6 + 24 + 24 + 6 + 24 + 24 = 117$。

【样例 2】

见选手目录下的 ***set/set2.in*** 与 ***set/set2.ans***。

该样例满足测试点 2 的约束条件。

【样例 3】

见选手目录下的 ***set/set3.in*** 与 ***set/set3.ans***。

该样例满足测试点 3 的约束条件。

【样例 4】

见选手目录下的 ***set/set4.in*** 与 ***set/set4.ans***。

该样例满足测试点 9 的约束条件。

【数据范围】

对于所有测试数据，保证：

- $1 \leq t \leq 3$；

- $2 \le n \le 20$；
- 对于所有 $0 \le i < 2^n$，均有 $0 \le a_i < 998,244,353$。

测试点编号	$n \le$	特殊性质
1	4	B
2		无
3	8	B
4		无
5	10	B
6		无
$7, 8$	12	B
9		无
$10 \sim 12$	16	B
$13, 14$		无
$15, 16$	20	AB
$17, 18$		A
$19 \sim 21$		B
$22 \sim 25$		无

特殊性质 A：保证至多存在 24 个 i 满足 $a_i \ne 0$。

特殊性质 B：保证对于所有 $0 \le i < 2^n$，均有 $a_i \ne 998,244,352$。

绝对防御（defense）

【题目描述】

小 Q 在与电脑玩一款名为“绝对防御”的回合制卡牌游戏。

小 Q 有一个大小为 n 的牌堆，包含两种牌：攻击牌与防御牌。游戏开始时，小 Q 会从**牌堆顶**抽取 k $(1 \le k \le n)$ 张牌作为初始手牌，接下来他会与电脑进行若干轮**对战**。

每轮对战开始时，小 Q 从牌堆顶抽取 2 张牌。特别地，若牌堆只剩余 1 张牌，则小 Q 只抽取 1 张。一轮对战分为两个**回合**：

- 第一回合：小 Q 为**攻击方**，电脑为**防御方**；
- 第二回合：小 Q 为**防御方**，电脑为**攻击方**。

在每**回合**中，攻击方**必须**从手牌打出一张**攻击牌**进行攻击，防御方**必须**从手牌打出一张**防御牌**进行防御。无法按要求出牌者立即判负。

电脑的攻击牌与防御牌都是无限的，即每回合中电脑永远能打出对应牌。为平衡电脑的实力，小 Q 可以使用一种特殊技能：当小 Q 为**防御方**时，他可以从手牌打出一张**攻击牌**进行防御。该技能每 3 轮**对战**才能使用一次，即在某轮使用技能后，接下来的 2 轮对战中均不能使用该技能。

在给定规则下，小 Q 的获胜目标为在电脑猛烈攻势中存活，即存在某轮对战结束后，牌堆被抽空。特别地，若游戏开始时牌堆已被抽空，则小 Q 直接达成获胜目标。小 Q 想知道最小的初始抽牌数 k，使得他能达成获胜目标。

小 Q 觉得这个问题过于简单，因此他增加了 q 次修改操作。第 i $(1 \le i \le q)$ 次修改操作会给定一个正整数 x_i，改变从牌堆顶到牌堆底的第 x_i 张牌的类型，即将攻击牌变为防御牌，将防御牌变为攻击牌。你需要对初始时及每次修改后的牌堆，求出最小的初始抽牌数 k，使得小 Q 能达成获胜目标。

【输入格式】

从文件 ***defense.in*** 中读入数据。

本题包含多组测试数据。

输入的第一行包含两个非负整数 c, t，分别表示测试点编号与测试数据组数。$c = 0$ 表示该测试点为样例。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

第一行包含两个非负整数 n, q，分别表示牌堆大小与修改次数。

第二行包含一个长度为 n 的字符串 $s_1 \dots s_n$，分别表示从牌堆顶到牌堆底的每张牌，其中 $s_i = 0$ 表示第 i 张牌为攻击牌，$s_i = 1$ 表示第 i 张牌为防御牌。

第 $i + 2$ $(1 \le i \le q)$ 行包含一个正整数 x_i，表示第 i 次修改的牌为从牌堆顶到牌堆底的第 x_i 张牌。

【输出格式】

输出到文件 ***defense.out*** 中。

对于每组测试数据，设初始时的答案为 k_0，第 i $(1 \le i \le q)$ 次修改后的答案为 k_i，输出一行 $q+1$ 个正整数 $k_0, k_1, \dots, k_q$，表示初始时及每次修改后的最小抽牌数，使得小 Q 能达成获胜目标。

【样例 1 输入】

```
0 3
5 1
01010
4
7 0
0001000
10 0
0001010000
```

【样例 1 输出】

```
1 1
3
2
```

【样例 1 解释】

该样例共包含三组测试数据。

对于第一组测试数据：

- 初始时，牌堆为 01010。若初始抽牌数为 1，小 Q 的一种可能的出牌方式为：
  - 初始时手牌为 $\{0\}$；
  - 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，一张防御牌，手牌变为 $\{0\}$；
  - 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，一张防御牌，手牌变为 $\{0\}$，此时牌堆被抽空。

  由于初始至少需要抽取一张牌，所以最小初始抽牌数为 1，故 $k_0 = 1$。
- 第一次修改后，牌堆变为 01000。若初始抽牌数为 1，小 Q 的一种可能的出牌方式为：
  - 初始时手牌为 $\{0\}$；

  - 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，一张防御牌，手牌变为 $\{0\}$；
  - 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，使用特殊技能再次打出一张攻击牌进行防御，手牌变为 $\{0\}$，此时牌堆被抽空。

由于初始至少需要抽取一张牌，所以最小初始抽牌数为 1，故 $k_1 = 1$。

对于第二组测试数据：

若初始抽牌数为 3，小 Q 的一种可能的出牌方式为：

- 初始时手牌为 $\{0,0,0\}$；
- 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，一张防御牌，手牌变为 $\{0,0,0\}$；
- 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，使用特殊技能再次打出一张攻击牌进行防御，手牌变为 $\{0,0,0\}$，此时牌堆被抽空。

可以证明，不存在比 3 更小的初始抽牌数能够抽空牌堆，故答案为 3。

对于第三组测试数据：

若初始抽牌数为 2，小 Q 的一种可能的出牌方式为：

- 初始时手牌为 $\{0,0\}$；
- 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，使用特殊技能再次打出一张攻击牌进行防御，手牌变为 $\{0,1\}$；
- 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，一张防御牌，手牌变为 $\{0,1\}$；
- 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，一张防御牌，手牌变为 $\{0,0\}$；
- 从堆顶抽取两张牌，打出一张攻击牌，使用特殊技能再次打出一张攻击牌进行防御，手牌变为 $\{0,0\}$，此时牌堆被抽空。

可以证明，不存在比 2 更小的初始抽牌数能够抽空牌堆，故答案为 2。

【样例 2】

见选手目录下的 ***defense/defense2.in*** 与 ***defense/defense2.ans***。

该样例满足测试点 2 的约束条件。

【样例 3】

见选手目录下的 ***defense/defense3.in*** 与 ***defense/defense3.ans***。

该样例满足测试点 $5 \sim 7$ 的约束条件。

【样例 4】

见选手目录下的 ***defense/defense4.in*** 与 ***defense/defense4.ans***。

该样例满足测试点 $9, 10$ 的约束条件。

【样例 5】

见选手目录下的 ***defense/defense5.in*** 与 ***defense/defense5.ans***。
该样例满足测试点 11 的约束条件。

【样例 6】

见选手目录下的 ***defense/defense6.in*** 与 ***defense/defense6.ans***。
该样例满足测试点 $12 \sim 14$ 的约束条件。

【数据范围】

设 N, Q 分别为单个测试点内所有测试数据的 n, q 的和。对于所有测试数据，保证：

- $1 \le t \le 10^4$；
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$，$N \le 5 \times 10^5$；
- $0 \le q \le 2 \times 10^5$，$Q \le 5 \times 10^5$；
- 对于所有 $1 \le i \le n$，均有 $s_i \in \{0, 1\}$；
- 对于所有 $1 \le i \le q$，均有 $1 \le x_i \le n$。

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>$n \le$</th><th>$q \le$</th><th>$N, Q \le$</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>1</td><td>20</td><td>20</td><td>60</td><td rowspan="5">无</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10^2</td><td>10^2</td><td>10^3</td></tr>
<tr><td>$3, 4$</td><td>$3,000$</td><td>$3,000$</td><td>10^4</td></tr>
<tr><td>$5 \sim 7$</td><td>10^5</td><td>0</td><td>3×10^5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2×10^5</td><td>200</td><td>5×10^5</td></tr>
<tr><td>$9, 10$</td><td rowspan="5">10^5</td><td rowspan="5">10^5</td><td rowspan="5">3×10^5</td><td>AB</td></tr>
<tr><td>11</td><td>AC</td></tr>
<tr><td>$12 \sim 14$</td><td>AD</td></tr>
<tr><td>$15 \sim 17$</td><td>E</td></tr>
<tr><td>$18, 19$</td><td rowspan="2">无</td></tr>
<tr><td>20</td><td>2×10^5</td><td>2×10^5</td><td>5×10^5</td></tr>
</table>

特殊性质 A：保证对于所有 $1 \le i \le n$，s_i 均在 $\{0, 1\}$ 中**独立均匀随机**生成。
特殊性质 B：保证所有的 x_i 互不相同，且对于所有 $1 \le i \le q$，均有 $s_{x_i} = 1$。
特殊性质 C：保证所有的 x_i 互不相同，且对于所有 $1 \le i \le q$，均有 $s_{x_i} = 0$。
特殊性质 D：保证对于所有 $1 \le i \le q$，x_i 均在 $[1, n]$ 中**独立均匀随机**生成。
特殊性质 E：保证对于所有 $0 \le i \le q$，均有 $1 \le k_i \le 45$。